

HOJA 4: APLICACIONES LINEALES**Estudio de la linealidad**

1) Estudie la linealidad de las siguientes aplicaciones:

- a) $f: R \rightarrow R^2$, $f(x) = (-3x, 2x)$ b) $f: R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = xy$
 c) $f: R^2 \rightarrow R^3$, $f(x, y) = (x + y, x - y, x)$ d) $f: R^2 \rightarrow R^2$, $f(x, y) = (x + y, 1)$
 e) $f: R^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$, $f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & a-c \end{pmatrix}$
 f) $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow S$, $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$, donde $S = \{A \in M_{2 \times 2}(R); A = A^t\}$
 g) $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow S$, $f(A) = AA^t$
 h) $f: R^2 \rightarrow R^2$, $f(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$, donde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

2) En R^3 se consideran los subespacios $S = L(\{(0,1,0), (1,1,0)\})$ y $T = L(\{(1,0,1)\})$

- a) Exprese cada vector $(x, y, z) \in R^3$ como suma de un vector $x_s \in S$ y otro $x_t \in T$.
 b) Dada la aplicación $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida por $f(x) = x_s$, demuestre que es lineal.
 c) Si L es un subespacio vectorial de R^3 de dimensión 2, ¿cuál es la dimensión de $f(L)$?

Matriz de una aplicación lineal3) Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 y $B = \{e_1, e_2\}$ una base de V . Sean f y g aplicaciones lineales de V en V definidas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(e_1) = -3e_1 + e_2 \\ f(e_2) = e_1 - e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} g(e_1) = e_1 + e_2 \\ g(e_2) = e_1 \end{cases}$$

Encuentre las ecuaciones matriciales que definen f , g , $f \circ g$, $g \circ f$, $2f^2 - 3g^2$.

4) Encuentre la matriz, respecto de las bases usuales en los correspondientes espacios vectoriales, de las siguientes aplicaciones lineales:

- a) $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow M_{2 \times 1}(R)$, definida por $f(A) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 b) $g: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$, definida por $g(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$
 c) $h: P_3(R) \rightarrow P_3(R)$, tal que $h(1) = x^2 + 1$, $h(x) = x + 2$, $h(x^2) = x^3 - x$ y $h(x^3) = 1$

Núcleo e imagen de una aplicación lineal5) Sea $f: R^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$ la aplicación definida por $f(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$. Obtenga la matriz de la aplicación lineal, su imagen y su núcleo.6) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre una base de $\text{Ker } f$ y otra de $\text{Im } f$.

7) Sea la aplicación lineal $f: R^3 \rightarrow R^4$ de ecuaciones
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3 \\ y_2 = -x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = 2x_2 - 3x_3 \\ y_4 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

a) Halle las ecuaciones paramétricas e implícitas de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.

b) Si $T = L(\{(1, 1, -1, 0), (0, 1, 1, 2)\})$, calcule las ecuaciones paramétricas e implícitas de $f^{-1}(T)$.

8) Sea V un espacio vectorial.

a) Si $f, g: V \rightarrow V$ son aplicaciones lineales, pruebe que $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$.

b) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + 2z, x + 3y, 3y - 2z)$. Obtenga una base de $f^{-1}(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$

Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

9) Averigüe si existe algún homomorfismo $f: R^3 \rightarrow R^2$ cumpliendo las siguientes condiciones, y, en caso afirmativo, analice si es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo:

a) $f(1, -1, 0) = (2, 1)$, $f(0, -1, 2) = (1, 1)$, $f(3, 0, 1) = (0, 3)$.

b) $f(1, -1, 0) = (2, 1)$, $f(0, -1, 2) = (1, 1)$, $f(1, -2, 2) = (-1, 4)$, $f(3, 0, 1) = (0, 3)$.

10) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de R^3 es
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
. Calcule $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_1 + 2e_2 - e_3)$. ¿Es f un isomorfismo?

11) Para cada valor del parámetro real k se considera $f_k: R^3 \rightarrow R^3$ el homomorfismo cuya matriz respecto a la base canónica es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
.

a) ¿Para qué valores de k es f_k isomorfismo?

b) Halle $f_1^{-1}(S)$, donde $S = L(\{(2, 1, -1), (-3, 2, 1)\})$

Existencia y unicidad de aplicaciones lineales

12) Halle una aplicación lineal $f: R^4 \rightarrow R^3$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$\text{Ker } f = L(\{(2, 1, 0, 1), (0, 1, 3, 0)\}) \quad \text{e} \quad \text{Im } f = L(\{(0, 1, 2), (1, 1, 0)\})$$

13) Halle una aplicación lineal $f: R^3 \rightarrow R^3$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$\text{Ker } f = L(\{(1, 0, 1), (1, 1, -1)\}) \quad \text{e} \quad \text{Im } f = L(\{(0, 0, 1)\})$$

14) Encuentre $f: R^3 \rightarrow R^3$ lineal que cumpla $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in R^3; x + z = 0\}$, $f(1, 0, 0)$ sea proporcional a $(0, 0, 1)$, y $f \circ f = f$. ¿Es única?

- 15) Sea M el subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}(R)$ definido por $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 2a-b \\ -a & a+2b \end{pmatrix} ; a, b \in R \right\}$
- a) Construya $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^3$ tal que $\text{Ker } f = M$.
- b) ¿Existe $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^3$ que verifique a) y sea sobreyectiva?

Ejercicios diversos

- 6) Sea $f: R^4 \rightarrow R^3$ una aplicación lineal dada por $f(a, b, c, d) = (c - d, b, a + b)$.
- a) Calcule la matriz de la aplicación con respecto a las bases canónicas de R^4 y de R^3 .
- b) Calcule las ecuaciones implícitas de $\text{Ker } f$ y paramétricas de $\text{Im } f$, especificando una base de cada uno de estos subespacios.
- c) Razone si f es monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.
- 17) Sean $f: R^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$ y $g: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^4$ las aplicaciones definidas por:
- $$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 \\ x_2 & x_1 - x_3 \end{pmatrix} \quad g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b - c, 0, a + b, d)$$
- a) Pruebe que f y g son aplicaciones lineales.
- b) Halle las matrices asociadas a f y g respecto de las bases usuales en los correspondientes espacios. Calcule los rangos.
- c) Obtenga los núcleos e imágenes de f y g .
- d) Encuentre la matriz de la composición $g \circ f$, su rango, su núcleo y su imagen.
- 18) Sea $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^3$ la aplicación lineal definida por $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0, a + b, a + d)$. Se pide:
- a) Matriz de f respecto de las bases usuales en ambos espacios.
- b) Base de $\text{Im } f$ y un complementario de $\text{Im } f$ en R^3 .
- c) Base de $S = \text{Ker } f$. Halle un subespacio T complementario de S en $M_{2 \times 2}(R)$. Escriba la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ como suma de un vector de S y otro vector de T .
- d) Compruebe que $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ forman una base de S y halle las coordenadas de $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ respecto de dicha base.
- e) Amplíe la base $\{M_1, M_2\}$ a una base de $M_{2 \times 2}(R)$ de forma que las dos primeras coordenadas de M_1 , M_2 y M_3 en dicha base sean nulas.
- f) Halle $f^{-1}(L(\{(0, 3, 4)\}))$.
- 19) Se consideran los espacios vectoriales R^3 y $M_{2 \times 2}(R)$. En el espacio $M_{2 \times 2}(R)$ se dan la base $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\}$ y el subespacio $V = L(\{A_1, A_2, A_3\})$.
- a) Estudie si $f: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^3$ definida por $f(A_1) = (-1, 1, 0)$, $f(A_2) = (1, 0, 3)$, $f(A_3) = (0, 0, 1)$, $f(A_4) = (1, 0, 0)$.
- b) Estudie si $g: V \rightarrow R^3$ donde $g(A_1) = (-3, 2, 0)$, $g(A_2) = (-1, 0, 1)$, $g(A_3) = (1, 1, 0)$ puede ser un homomorfismo.
- c) Extienda la aplicación g del apartado b) a un homomorfismo $g': M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^3$ tal que $g'(A_i) = g(A_i)$, $i = 1, 2, 3$ y $\text{Ker}(g') = L(\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\})$

20) Sea $f: R^3 \rightarrow R^4$ un homomorfismo que verifica:

$$\text{Ker } f = L(\{(1,1,1), (2,1,2), (0,1,0)\})$$

$$\text{Im } f = \{(x,y,z,t) \in R^4; x+2t=0, x+z+t=0, z+t=0\}$$

- Obtenga una base de $\text{Ker } f$ y extiéndala a una base B de R^3 .
- Obtenga una base de $\text{Im } f$ y extiéndala a una base B' de R^4 .
- Obtenga la matriz de f respecto de las bases B y B' construida en los apartados anteriores.
- Obtenga la matriz de f en las bases canónicas de R^3 y R^4 .

Matriz del cambio de base y matriz asociada a una aplicación lineal en distinta base

21) Obtenga las matrices del cambio de base de B_1 a B_2 para las siguientes bases:

- $B_1 = \{e_1 = (1, -1), e_2 = (3, 1)\}$, $B_2 = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)\}$
- $B_1 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$,
 $B_2 = \{u_1 = (2, 3, 4), u_2 = (1, 2, 6), u_3 = (1, 3, 5)\}$

22) Sea V un espacio vectorial sobre R de dimensión 3. Sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ dos bases relacionadas por las ecuaciones $e'_1 = 2e_1 - e_2 - e_3$; $e'_2 = -e_2$; $e'_3 = 2e_2 + e_3$. Encuentre los vectores de V que posean las mismas coordenadas respecto de B y B' .

23) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ la aplicación lineal que cumple:

$$f(1, 1, 1) = (1, 1, 0), f(-1, 1, 1) = (0, 0, 1), f(-1, -2, 1) = (0, 0, 0)$$

- Obtenga la matriz de f respecto de la base canónica.
- Obtenga la matriz de f respecto de la base $B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -2, 1)\}$.

24) Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de R^3 y $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida, en función del parámetro real a , por:

$$f(e_1) + f(e_2) = a e_1 + (a+1)e_2 + e_3, f(e_1) + f(e_3) = -e_1 + a e_2 + 2e_3, f(e_3) = -e_1 + e_3.$$

- Halle la matriz de f respecto de B y calcule para qué valores del parámetro a es f biyectiva.
- Se consideran $a = 1$ y el subespacio vectorial $W = L(\{(1, 1, 0), (2, 0, 1)\})$. ¿Es $\text{Ker } f \oplus W = R^3$? ¿Es $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = R^3$? Calcule $f^{-1}(-2, -2, 0)$.
- Para $a = 2$ se considera $B' = \{u_1 = e_1 - e_2, u_2 = e_3, u_3 = 2e_2 + e_3\}$. Pruebe que B' es base y halle la matriz de f respecto de B' .

25) Sea $f: U = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}) \rightarrow V = L(\{(0, 0, 0, 1), (-1, 1, -1, 0)\})$ definida por:

$$f(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1), f(0, 1, 1, 1) = (-1, 1, -1, 1), f(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

- Obtenga las bases de U y V de forma que al colocar los vectores de dichas bases como filas de una matriz se obtenga una forma escalonada
- Escriba la matriz de f respecto de las bases obtenidas en el apartado a)

26) Sea $f: R^4 \rightarrow R^4$ un endomorfismo tal que:

$$f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, -1), f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0) \text{ y } \text{Ker } f = \text{Im } f.$$

Determine la matriz asociada a f en la base canónica de R^4 .

27) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ una aplicación lineal que verifica $f(0, 0, -1) = (2, -5, -3)$ y $f(s) = 3s$ para todo $s \in \{s = (x, y, z) \in R^3; x + z = 0\}$. Halle la matriz de f respecto de la base canónica de R^3 y $f^{-1}(r)$, siendo r la recta de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

- 28) Dada la aplicación $f: R^3 \rightarrow R^4$ definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcule el valor del parámetro $a \in R$ para que el vector $(1, a, -a, 0)$ pertenezca a la imagen de f . Obtenga $f^{-1}((1, 0, 0, 0))$. En R^3 se considera el subespacio vectorial U generado por la base $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ y en R^4 el subespacio V generado por la base $B_2 = \{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, -1), (2, 0, -1, 1)\}$. Obtenga la matriz de $f: U \rightarrow V$, la aplicación f restringida a los subespacios U y V , respecto de las bases dadas.
- 29) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ una aplicación lineal y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica. Sabiendo que se cumple: $\dim \text{Ker } f = 2$, $e_1 - e_2 \in \text{Im } f$, $f^2 = f$ y que la matriz de f respecto de B coincide con la matriz de f respecto de $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$, siendo B' la base de R^3 tal que $u_1 = 2e_1 - e_2$, $u_2 = -e_1 + 2e_2$, $u_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$,
- Halle la matriz de f respecto de B .
 - Obtenga las ecuaciones implícitas de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
- 30) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S = L(\{A, B, C\})$ y $g: S \rightarrow R^3$ tal que $g(A) = (0, 1, 0)$, $g(B) = (1, 0, 1)$, $g(C) = (1, 1, 1)$.
- Calcule bases de $\text{Ker } g$ e $\text{Im } g$. Calcule las ecuaciones de g respecto de las bases $B_1 = \{A, B, C\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, y respecto de las bases $B_3 = \left\{A, B, E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_4 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$
 - Estudie si existe algún homomorfismo $f: S \rightarrow R^3$ verificando $f(A) = (0, 1, 0)$, $f(B) = (1, 0, 1)$, $f(C) = (1, 1, 1)$, $f(D) = (0, 1, 2)$.